

А. Ф. Клейменов, С. И. Осипов, А. С. Черепов, Д. Р. Кувшинов

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ\*

### 1. Введение

Приводятся результаты численного решения одной линейной неантагонистической игры двух лиц в иерархической постановке. Решение получено с помощью программной реализации алгоритма, разработанного для класса динамических игр Штакельберга в плоскости с цилиндрическими показателями качества. Производится сравнение полученных результатов с аналитическим решением.

### 2. Формулировка задачи

В работе [1] для одного класса неантагонистических динамических игр двух игроков с цилиндрическими показателями качества разработан алгоритм построения решений. В этой работе при формальном описании игры и структуры решений используются результаты теории неантагонистических дифференциальных игр [2], опирающиеся на формализацию и результаты теории антагонистических позиционных дифференциальных игр [3, 4]. Предложенный алгоритм использует структуры, элементами которых являются плоские многоугольники общего вида, получающиеся с помощью итерационных последовательностей теоретико-множественных операций алгебраической суммы и пересечения. Соответствующие алгоритмы для этих операций описаны в [5] и [6]. Используется также алгоритм построения стабильного моста [7] в антагонистической линейной дифференциальной игре. Подробно предложенный в [1] алгоритм описан в работе [8].

В настоящей работе рассматривается задача управления плоским движением материальной точки массы  $m$ , находящейся под действием двух сил  $F_1$  и  $F_2$ . При этом сила  $F_1$  поворачивается на угол  $\varphi$ . В формировании сил участвуют два игрока, имеющих различные, но, вообще говоря, не прямо противоположные интересы. Первый игрок осуществляет выбор силы  $F_1$ , а второй – силы  $F_2$ , а также угла поворота  $\varphi$  силы первого игрока. Указанная

---

\*Работа частично поддержана грантом РФФИ № 06-01-00436.

задача рассматривалась в статье [9] как иерархическая дифференциальная игра, там же получено ее аналитическое решение.

Полагаем, что управляющие воздействия стеснены следующими ограничениями:

$$\begin{aligned} \|F_i\|^2 &= F_{i1}^2 + F_{i2}^2 \leq 1, \quad i = 1, 2, \\ |\varphi| &\leq \varphi_0, \quad 0 < \varphi_0 < \pi/2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

При  $m = 1$  уравнения движения точки имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = F_{11} \cos \varphi - F_{12} \sin \varphi + F_{21}, \\ \ddot{x}_2 = F_{11} \sin \varphi + F_{12} \cos \varphi + F_{22}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Заданы начальные условия  $x(t_0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$  и момент окончания игры  $\vartheta$ .

Принимаются следующие предположения.

- 1<sup>0</sup>. Лидер – первый игрок выбирает свою стратегию до начала игры и сообщает ее ведомому – второму игроку.
- 2<sup>0</sup>. Получив указанную информацию от лидера, ведомый действует рационально, т. е. по сути решает задачу оптимального управления со своим показателем качества.

Цель каждого игрока – минимизировать свой терминальный показатель, имеющий смысл расстояния от положения точки в конечный момент игры  $\vartheta$  до заданной целевой точки этого игрока:

$$\sigma_i(x[\vartheta]) = \|x[\vartheta] - a^i\|, \quad a^i = (a_1^i, a_2^i), \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

В рассматриваемой игре условие седловой точки в маленькой игре [4] не выполняется. Тогда, как это следует из [2–4], классы действий игроков зависят от информированности игроков о реализующихся управлениях партнера в текущий момент времени. Здесь считается, что второй игрок имеет информацию о реализующемся управлении первого игрока  $F_1[t]$ . Кроме того, полагаем, что оба игрока имеют полную информацию о текущем фазовом векторе системы  $x[t]$ . Тогда лидер формирует свои действия в классе чистых позиционных стратегий, а ведомый – в классе позиционных контрстратегий.

Формализация понятий стратегии, контрстратегии и порождаемых ими движений для неантагонистических дифференциальных игр, опирающаяся на формализацию в теории антагонистических позиционных дифференциальных игр, подробно рассматривается в [2]. Формальное определение рациональной стратегии приводится там же.

Решаемая задача формулируется следующим образом.

**Задача 1.** При выполнении предположений  $1^0$  и  $2^0$  найти стратегию лидера, доставляющую минимум его показателю  $\sigma_1(x[\vartheta])$  (2.3).

В [2, 9] показано, что стратегия первого игрока, доставляющая решение задачи 1, конструируется на основе вспомогательной задачи оптимального управления, которая формулируется следующим образом.

**Задача 2.** Найти измеримые программные управления  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$ ,  $\varphi(t)$ , доставляющие минимум показателю  $\sigma_1(x(\vartheta))$ , при условии

$$\sigma_2(x(\vartheta)) = \gamma_2(\vartheta, x(\vartheta)) \leq \gamma_2(t, x(t)), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta. \quad (2.4)$$

Здесь  $\gamma_2(t, x)$  – непрерывная функция цены вспомогательной позиционной антагонистической игры  $\Gamma_2$ , динамика которой описывается системой (2.2) и в которой второй игрок, распоряжающийся управлениями  $F_2$  и  $\varphi$  и знающий текущее значение управления  $F_1$ , стремится минимизировать показатель  $\sigma_2(x[\vartheta])$ , а первый игрок, распоряжающийся управлением  $F_1$ , ему противодействует.

### 3. Общее описание аналитического решения

Содержание настоящего пункта статьи соответствует работе [9].

Система уравнений движения (2.2) приводится к системе четырех уравнений первого порядка стандартной заменой переменных вида

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = \dot{x}_1, \quad y_4 = \dot{x}_2.$$

Далее производится следующая замена переменных:

$$z_1 = y_1 + (\vartheta - t)y_3, \quad z_2 = y_2 + (\vartheta - t)y_4, \quad z_3 = y_3, \quad z_4 = y_4.$$

Тогда два первых уравнения, описывающих динамику системы, будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (\vartheta - t)(F_{11} \cos \varphi - F_{12} \sin \varphi + F_{21}), \\ \dot{z}_2 &= (\vartheta - t)(F_{11} \sin \varphi + F_{12} \cos \varphi + F_{22}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Показатели игроков (2.3) примут вид

$$\sigma_i(z[\vartheta]) = \|z[\vartheta] - a^i\|, \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

Начальные условия преобразуются так:

$$z(t_0) = z_0, \quad z_1(t_0) = x_{01} + (\vartheta - t)\dot{x}_{01}, \quad z_2(t_0) = x_{02} + (\vartheta - t)\dot{x}_{02}. \quad (3.3)$$

Нетрудно видеть, что при решении задачи 1 достаточно рассматривать ее для укороченной системы (3.1) с показателями (3.2).

В рассматриваемом случае решение задачи 2 во многом облегчается тем, что цена антагонистической игры  $\Gamma_2$  находится в явном виде:

$$\gamma_2(t, z) = \max \{ \|z - a^2\| - 1/2(1 - \cos \varphi_0)(\vartheta - t)^2, 0 \}. \quad (3.4)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= (\vartheta - t)(F_{11}(t) \cos \varphi - F_{12}(t) \sin \varphi + F_{21}(t)), \\ p_2(t) &= (\vartheta - t)(F_{11}(t) \sin \varphi + F_{12}(t) \cos \varphi + F_{22}(t)), \\ p(t) &= (p_1(t), p_2(t)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Следующая задача является трансформацией задачи 2.

**Задача 3.** Найти измеримую вектор-функцию  $p^0(\cdot) = \{p^0(t), t_0 \leq t \leq \vartheta\}$ , доставляющую минимум показателю  $\sigma_1(z(\vartheta))$  (3.2) при условии

$$\sigma_2(z(\vartheta)) = \gamma_2(\vartheta, z(\vartheta)) \leq \gamma_2(t, z(t)), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad (3.6)$$

где  $z(\cdot) = \{z(t), t_0 \leq t \leq \vartheta\}$  – траектория системы

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= p(t), \\ \|p(t)\| &\leq 2(\vartheta - t), \\ z(t_0) &= z_0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

а функция  $\gamma_2(\cdot, \cdot)$  определена в (3.4).

Управление  $p(t)$  и траектория  $z(\cdot)$ , удовлетворяющие условиям (3.6) и (3.7), назовем *допустимыми в задаче 3*. Множество допустимых траекторий обозначим символом  $D$ , а символом  $D(t)$  – его сечение плоскостью  $t = \text{const}$ . Тогда множество концов траекторий, допустимых в этой задаче, будет обозначаться через  $D(\vartheta)$ . Построение именно этого множества является ключевым моментом при решении задачи 3. Если целевая точка лидера не принадлежит этому множеству (этот случай и является наиболее интересным), то допустимое управление  $p^0(\cdot)$ , порождающее траекторию  $z^0(t)$ , которая приводит в точку  $m^0 \in D(\vartheta)$ , ближайшую к  $a^1$  на множестве  $D(\vartheta)$ , и есть решение задачи 3. Получив решение задачи 3, стандартным образом [2, 9] находим решение задачи 1.

Не ограничивая общности, положим  $t_0 = 0$ ,  $a^2 = (0, 0)$ . В статье [9] доказаны утверждения, ряд которых носит геометрический характер, на их основе получено описание границы множества  $D(\vartheta)$  в аналитическом виде.

#### 4. Общее описание алгоритма решения

Содержание настоящего пункта статьи соответствует работе [1].

Предлагаемый алгоритм основан на приведении исходной динамической системы к системе конечно-разностных уравнений для сетки по оси времени  $(t_i, i = 0, \dots, n)$  и применении методов вычислительной геометрии для приближенного построения границы сечений  $D(t_i)$ . При таком подходе граница сечения представляется плоским многоугольником общего вида, который может быть невыпуклым и не обязательно является связным. Получаются такие многоугольники в результате циклической последовательности теоретико-множественных операций: алгебраической суммы, разности или объединения, повторяющихся для каждого шага алгоритма по оси времени. Эти самодостаточные алгоритмы оформлены как модули, последовательность их вызовов определяется программой-оболочкой, использующей для хранения сечений дисковые файлы.

Множество  $D(\vartheta)$  аппроксимируется набором его приближенных сечений – «дуг», получаемых в результате работы алгоритма. Сопоставление рис. 1,а и 1,б, а также рис. 2,а и 2,б дает наглядное представление о том, как дуги, получающиеся в результате работы алгоритма, «заполняют» соответствующие множества  $D(\vartheta)$ .

Для построения каждой дуги сначала с помощью попятной процедуры [6] приближенно вычисляются сечения стабильного моста в задаче сближения-уклонения [3, 4] с лебеговым множеством, границей которого является одна из линий уровня показателя качества  $\sigma_2(x) = c$ .

Для каждого моста, определенного значением  $c$ , в прямом времени для моментов  $t = t_i$  строится последовательность многоугольников, аппроксимирующих сечения множества траекторий системы, не попадающих внутрь указанного моста, плоскостями  $t = t_i$ . Назовем эту последовательность многоугольников *трубкой достижимости* [5].

Алгоритм построения трубки достижимости предполагает выполнение следующих операций, повторяющихся для каждого момента времени  $t_i$ . Пусть сечение трубки достижимости (текущий многоугольник) построено для момента  $t_i$ . Далее строится множество достижимости системы в следующий момент времени  $t_{i+1}$ , для которого начальными состояниями являются точки текущего многоугольника. Затем из полученного множества достижимости вычитается сечение моста для момента  $t_{i+1}$ . Результирующий многоугольник и будет сечением трубки достижимости для момента  $t_{i+1}$ . На последнем шаге вершины сечения трубки достижимости, лежащие на границе последнего сечения моста, берутся в качестве искомой дуги.

Следует отметить, что для построения множеств достижимости в теку-

щий момент времени используется алгоритм построения алгебраической суммы многоугольников. При этом текущий многоугольник складывается с множеством, описывающим множество достижимости системы из произвольного начального состояния, принадлежащей плоскости  $t = t_i$ ; назовем его «точечным» множеством достижимости.

Величина шага изменения параметра  $s$  определяет число дуг и является важным параметром настройки точности решения.

Другой характеристикой, определяющей точность приближения, является число отрезков, составляющих дугу. Эта характеристика сложным образом зависит от шага сетки по времени, определяющего число сечений моста.

В итоге число шагов сетки по времени определяет скорость роста числа вершин в сечениях трубки достижимости и влияет на число отрезков соответствующей дуги.

Ввиду быстрого роста числа вершин и связанного с этим падения производительности и точности (длины сторон многоугольников становятся малыми), приходится выполнять прореживание вершин на каждом шаге алгоритма. Способ, с помощью которого производится прореживание, для некоторых значений параметров может оказать существенное влияние на эффективность работы алгоритма.

## 5. Результаты численного эксперимента

С помощью комплекса программ [8], реализующих алгоритм построения решений для класса игр Штакельберга, был проведен вычислительный эксперимент по построению множества  $D(\vartheta)$  в исследуемой задаче.

Было проведено сравнение численного решения с аналитическим в двух вариантах числовых значений параметров задачи, соответствующих двум основным видам множества  $D(\vartheta)$ . Без ограничения общности начальную точку  $z_0$  можно взять на оси абсцисс, а целевую точку второго игрока  $a^2$  – в начале координат.

В обоих вариантах принимаем: расстояние от начальной точки  $z_0$  до целевой точки второго игрока  $a^2$  равно  $\rho_0 = 0.5$ , а значение угла  $\varphi_0 = \pi/4$ . В первом варианте момент окончания игры полагаем равным  $\vartheta = 0.5$ , во втором (рис. 1, 2)  $\vartheta = 1.0$ .

Расчеты показывают, что в обоих вариантах граница множества  $D(\vartheta)$  включает дугу  $AA'$  окружности радиуса  $\rho_0 - b\vartheta^2$  с центром в начале координат (левая часть границы), которая стыкуется с кривыми  $AB$  и  $A'B'$  (в первом варианте, рис. 1) и  $AC$ ,  $A'C$  (во втором варианте, рис. 2). Правую границу множества в первом примере формирует дуга  $BB'$  окружности радиуса  $\vartheta^2$  с центром в начальной точке  $z_0$ . С ростом  $\vartheta$  дуга  $BB'$  уменьшается.

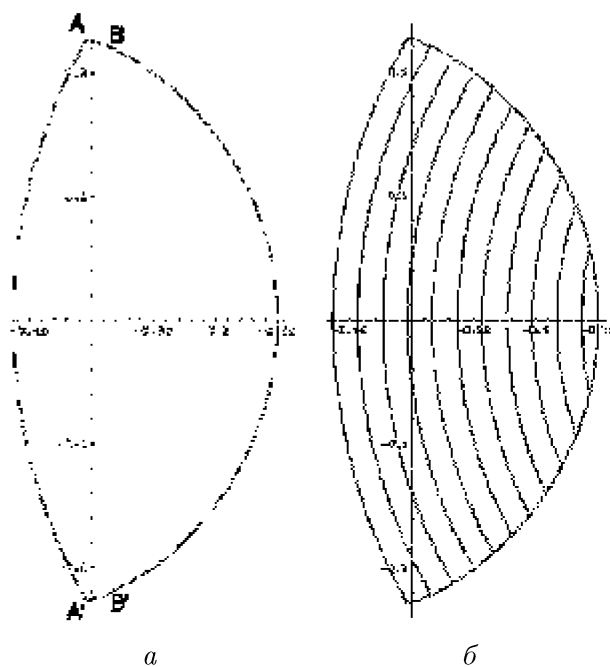


Рис. 1

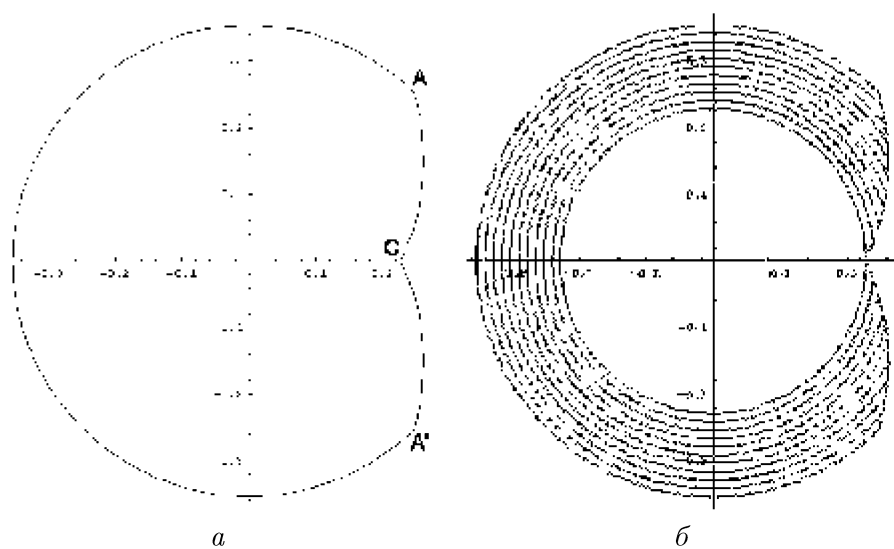


Рис. 2

На точность расчета существенно влияют сразу несколько параметров.

Во-первых, группа параметров, определяющих точность построения многоугольников:

- число шагов по оси времени (одновременно сечений моста и точечных множеств достижимости);
- число вершин, составляющих контуры сечений моста;
- число вершин в точечном множестве достижимости.

Во-вторых, группа параметров прореживания, ограничивающих рост числа вершин многоугольников:

- величина ограничения снизу на длину стороны многоугольников;
- величина ограничения снизу на синус угла между смежными ребрами многоугольников.

Всего параметров точности, оказывающих влияние на работу алгоритма, довольно много, что затрудняет оценку его погрешности, особенно если иметь в виду вычислительную погрешность. Следует отметить, что некоторые параметры могут быть взаимозависимыми. Например, параметры точности построения могут влиять на параметры прореживания: если число вершин в сечении стабильного моста или в точечном множестве достижимости достаточно велико, то длина ребер многоугольников для этих множеств или синус угла при вершине может стать меньше заданной нижней границы.

Эксперименты показали, что, как и ожидалось, при уменьшении минимальной длины ребра, допускаемой алгоритмом прореживания, существует предел, когда нарушается устойчивость работы алгоритма в целом. Бороться с этим можно, увеличивая число шагов по оси времени. Но лучшим вариантом, вероятно, может оказаться применение какого-либо другого алгоритма прореживания.

Множество  $D(\vartheta)$  для первого варианта изображено на рис. 1, а для второго – на рис. 2. Аналитическое решение обозначено литерой  $a$ , численное решение –  $b$ . Вычисления производились с 64-битной точностью и следующими значениями параметров: 500 шагов по времени, 512 вершин сечения моста, 64 вершины точечного множества достижимости, минимальная длина ребра  $10^{-4}$ , минимальное значение синуса угла при вершине и максимальное отклонение дуги от радиуса последнего сечения моста  $10^{-5}$ . Средняя относительная погрешность составила 0.0065 в первом варианте и 0.056 во втором.

При сравнении аналитических и численных результатов выяснилось, что в аналитических формулах, описывающих границу множества достижимости  $D(\vartheta)$  в [9], имеется неточность. Ниже приводится уточненное описание границы множества  $D(\vartheta)$ .



Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} b &= 1/2(1 - \cos \varphi_0), \\ u_0 &= \max\{b\rho_0, \quad b\vartheta^2, \quad \rho_0 + (b-1)\vartheta^2\}, \\ \bar{u}_1 &= \rho_0^2 + (b^2 - 1)\vartheta^4, \\ u_1 &= \begin{cases} \sqrt{\bar{u}_1}, & \text{если } \bar{u}_1 > 0; \\ u_1 = 0, & \text{иначе;} \end{cases} \\ u^* &= \max\{u_0, u_1\}. \end{aligned}$$

Тогда кривая  $AB$  рис. 1 ( $AC$ , рис. 2) задается в полярных координатах  $(r, \phi)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} r &= u - b\vartheta^2, \\ \phi &= \arccos \frac{T^2(u) - (u - bT(u))^2 - \rho_0^2}{2\rho_0(u - bT(u))} + \frac{\sqrt{1 - b^2}}{b} \ln \frac{u - b\vartheta^2}{u - bT(u)}, \\ \text{где } T(u) &= \sqrt{\frac{u^2 - \rho_0^2}{b^2 - 1}}, \quad \text{а } u^* \leq u \leq \rho_0. \end{aligned}$$

Левая часть границы задается дугой окружности радиуса  $r = \rho_0 - b\vartheta^2$ . В случае  $u_1 > u_0$  правая часть задается дугой окружности радиуса  $\vartheta^2$  с центром в начальной точке  $z_0$ . Нижняя часть границы симметрична верхней относительно оси абсцисс.

Таким образом, можно считать, что предлагаемый алгоритм построения множества  $D(t)$  дает приемлемые результаты и может применяться для других задач данного класса, которые в подавляющем большинстве не имеют аналитического решения.

## Литература

1. Осипов С. И. Численное построение решений одного класса иерархических линейных дифференциальных игр на плоскости // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск, 1991. С. 73–78.
2. КЛЕЙМЕНОВ А. Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука. Урал. отд., 1993.
3. КРАСОВСКИЙ Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
4. КРАСОВСКИЙ Н. Н., СУББОТИН А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

5. Осипов С. И. Алгоритм построения алгебраической суммы невыпуклого односвязного и выпуклого многоугольников // Проблемы теоретической и прикладной математики. Свердловск, 1989. С. 1–12.
6. Вахрушев В. А., Тарасьев А. М., Ушаков В. Н. Алгоритм построения пересечения и объединения множеств на плоскости // Управление с гарантированным результатом. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1987. С. 28–36
7. Исакова Е. А., Логунова Г. В., Пацко В. С. Построение стабильных движений в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (материалы по математическому обеспечению ЭВМ). Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984. С. 127–158.
8. KLEIMENOV A., OSIPOV S. Computation of Stackelberg trajectories in a class of two-person linear differential games with terminal players' payoffs and polygonal constraining for control // CAO 2003 Workshop, IFAC Proc. Elsevier Science Ltd., Oxford, 2003.
9. Вайсблат П. М., Клейменов А. Ф. Решение одной иерархической дифференциальной игры двух лиц // Управление с гарантированным результатом. Свердловск, 1987. С. 15–27.